Να υπολογισθεί ο όγκος που περικλύεται μεταξύ των επιφανειών με εξισώσεις $z = x^2+3y^2$ και $z = 8-x^2-y^2$.

Έχω ότι οι δυο επιφάνειες τέμνονται πάνω στην έλλειψη

$$x^2+3y^2 = 8-x^2-y^2 \iff x^2+2y^2 = 4$$

Άρα η κοινή προβολή των επιφανειών αυτών στο επίπεδο Oxy είναι το χωρίο: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+2y^2 \leq 4\}$ → κανονικό χωρίο.

Θα είναι λοιπόν,

$$V = \iint_D \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} 1 \, dz\, dx\, dy = \iint_D (8-2x^2-4y^2)\, dx\, dy$$

Με αλλαγή μεταβλητής $\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = \dfrac{r\sin\phi}{\sqrt{2}} \end{cases}$, το χωρίο D μετασχηματίζεται

στον κυκλικό δίσκο

$$D' = \{(r,\phi) : \phi \in [0,2\pi),\ 0 \leq r \leq 2\}$$

και τότε έχω: $$\iint_D (8-2x^2-4y^2)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (8-2r^2)\frac{r}{\sqrt{2}}\, dr\, d\phi$$

$= 8\pi\sqrt{2}$ μονάδες όγκου.

Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από τις επιφάνειες $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=1$ και $z=0$.

Το στερεό αποτελεί την τομή της κωνικής επιφάνειας $z=\sqrt{x^2+y^2}$ και της κυκλικής κυλινδρικής επιφάνειας $x^2+y^2=1$

Είναι άνω φραγμένο από την κωνική επιφάνεια, έχει ως παράπλευρη επιφάνεια τον κύλινδρο και είναι κάτω φραγμένο από το επίπεδο $z=0$.

Είναι λοιπόν, $$V=\iiint_M 1\,dx\,dy\,dz=\iint_D\left(\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}1\,dz\right)dx\,dy$$

$$=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

. Το χωρίο D είναι η προβολή του στερεού στο επίπεδο Oxy, συνεπώς είναι ο κυκλικός δίσκος $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$

Μέσω μετασχηματισμού σε πολικές συν/νες $\begin{cases} x=r\cos\phi \\ y=r\sin\phi \end{cases}$, $r\in[0,1]$, $\phi\in[0,2\pi)$

, έχω $$V=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\cdot\left|\det\begin{pmatrix}\cos\phi & -r\sin\phi\\ \sin\phi & r\cos\phi\end{pmatrix}\right|dr\,d\phi=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\,dr\,d\theta$$

$=\frac{2\pi}{3}$ μονάδες όγκου

Να υπολογισθεί το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint_M (2x-y-z)\,dx\,dy\,dz$,

όπου M είναι το φραγμένο στερεό μεταξύ των επιφανειών

$x=1$, $y=0$, $z=0$, $y=x^2$ και $z=x+y$

Έχω:

$$\iiint_M (2x-y-z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_0^{x+y} (2x-y-z)\,dz\right)dy\,dx$$

$$= \int_0^1\int_0^{x^2} \left(2xz - yz - \frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{x+y} dy\,dx \quad \int_0^1\int_0^{x^2}\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{3y^2}{2}\right)dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3x^2y}{2} - \frac{y^3}{2}\right)\Bigg|_0^{x^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{3x^4}{2} - \frac{x^6}{2}\right)dx = \left(\frac{3x^5}{10} - \frac{x^7}{14}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{8}{35}$$

Υπολογίστε το $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^\alpha}{\ln x}\,dx, \quad 0<\alpha\le b.$

Έχω ότι: $$\int_0^1\int_\alpha^b x^y\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_\alpha^b dx = \int_0^1 \frac{x^b - x^\alpha}{\ln x}\,dx, \quad 0<\alpha\le b \qquad (1)$$

Το χωρίο ολοκλήρωσης είναι ορθογώνιο, οπότε μπορώ να εναλλάξω τα όρια ολοκλήρωσης. Θα έχω τότε:

$$\int_0^1\int_\alpha^b x^y\,dy\,dx = \int_\alpha^b\int_0^1 x^y\,dx\,dy = \int_\alpha^b \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 dy$$

$$= \int_\alpha^b \frac{1}{y+1}\,dy = \ln\left(\frac{b+1}{\alpha+1}\right). \qquad (2)$$

Συνεπώς από (1) = (2), έχω ότι $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^\alpha}{\ln x}\,dx = \ln\left(\frac{b+1}{\alpha+1}\right)$

Υπολογίστε το $\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy$, όπου D το χωρίο που φράσσεται από τον κύκλο $x^2+y^2=x$

Με συμπλήρωση τετραγώνων, το χωρίο D είναι το εσωτερικό κύκλου κέντρου $(1/2, 0)$ κι ακτίνας $1/2$, διότι

$$x^2+y^2=x \iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Με μετασχηματισμό σε πολικές συν/νες $\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$, και η

$x^2+y^2=x$ γίνεται $r^2=r\cos\phi \Rightarrow r=\cos\phi$.

Έτσι το χωρίο ολοκλήρωσης γράφεται με πολικές συν/νες ως

$$D=\left\{(r,\phi):\ \phi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ r\in[0,\cos\phi]\right\}$$

Συνεπώς, $$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos\phi}\frac{r\,dr\,d\phi}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[-\sqrt{1-r^2}\right]_0^{\cos\phi}d\phi=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1-\sqrt{1-\cos^2\phi}\right)d\phi=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-|\sin\phi|)\,d\phi$$

$$=\pi-2$$

Υπολογίστε το $\iint_D (x^2+y^2)^2 dxdy$, όπου D είναι ο δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους $x^2+y^2=1$ και $x^2+y^2=4$.

Με μετασχηματισμό σε πολικές συν/νες $\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$, $\begin{matrix} r \in [1,2] \\ \phi \in [0,2\pi) \end{matrix}$

, έχω ότι: $$\iint_D (x^2+y^2)^2 dxdy = \int_0^{2\pi}\int_1^2 (r^2)^2 \cdot r \, dr d\phi = 2\pi \left[\frac{r^6}{6}\right]_1^2$$
$$= 21\pi$$